Erich Weil,

« Logique mathématique et logique des mathématiques »

Présentation par Alain Deligne

Circonstances de rédaction

Sa première matière secondaire étant la philologie allemande et l'histoire littéraire allemande moderne, Weil a passé son examen de seconde matière secondaire en Analyse mathématique (qui est un prolongement de l'arithmétique, reconstruite sur la notion de nombre entier) chez le professeur Emil Artin (1898-1962) en 1928 à Hambourg. Ce dernier avait été nommé en 1926 Professeur au Séminaire de mathématiques de l'Université de cette ville. Vu que Weil le mentionne dans son *Curriculum vitae* de 1928 comme ayant été l'un de ses enseignants et que l'*IEW* possède un cahier de notes prises par lui à un cours d'algèbre moderne donné à Hambourg par ce professeur durant le semestre d'été de 1926[1], il n'y alors aucun doute que c'est sous sa direction que le jeune Weil a fait cette même année sont exposé sur « Logique mathématique et logique des mathématiques ». Un autre étudiant, le Néerlandais B.L. van der Waerden était également présent à ce cours magistral et c'est en partie sur sa base qu'allait paraître quelques années plus tard son célèbre manuel de *Moderne Algebra*, établi également d'après des cours de la mathématicienne Emmy Noether qu'il avait suivis auparavant à Göttingen[2]. De renommée internationale, E. Artin avait travaillé, outre dans le domaine de l'algèbre, également sur la théorie des nombres. En 1934, il se mua en un professeur ‹ conformiste ›. Mais en 1937, il dut quitter l'Allemagne, sa femme étant juive.

Avant de présenter synthétiquement le mouvement de pensée qui se dessine dans l'exposé de Weil, il nous semble encore nécessaire de préciser certains contextes.

Présupposés

Weil se penche ici sur la profonde crise d'incertitude qu'ont connue les fondements des mathématiques à la fin du XIX^{e} siècle et dans le premier tiers du XX^{e} siècle. Des mathématiciens, des logiciens, des philosophes des mathématiques et de la sémantique formelle tentent alors de découvrir la structure axiomatique des raisonnements mathématiques. Par mathématiciens, logiciens et philosophes interposés, Weil s'interroge ainsi sur les nombres, leur nature, leurs propriétés, plus généralement encore sur le rapport de la logique aux mathématiques et pose, en une langue non formalisée, la question de leurs limites ainsi que celle d'une possible logicisation des mathématiques. Il tente de juger philosophiquement de leurs principes. Son point de départ est que les mathématiciens modernes (avec les travaux de Dedekind, Frege, Cantor, Hilbert, Russell, Couturat et Peano) s'accordent pour construire leur discipline sur la base de la logique : une nouvelle logique mathématique qui avait déjà été fondée en fait par Leibniz avec son idée de caractéristique universelle et qui est tout à fait différente de la logique classique, syllogistique. C'est qu'il y a eu là un changement d'orientation fondamental : la logique s'entend maintenant contrastivement par rapport à l'empirisme. Mais ce qui complexifie le tout est que si quelqu'un comme par exemple le

[1] « Artin, *Algebra* » (140 pages, propriété de l'*IEW* – Université de Lille). A la suite du mathématicien allemand David Hilbert (1862-1943) qui, dans *Les fondements de la géométrie* (1899), avait construit un modèle algébrique de géométrie non archimédienne, E. Artin, ainsi que son assistant Otto Schreier (1901-1929), ont défini axiomatiquement une nouvelle discipline, « l'algèbre réelle ». Nous développons ce point dans notre Introduction à l'œuvre de jeunesse de Weil, en préparation.

[2] *Algèbre moderne*, paru dans la collection *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 1930-1931.

néokantien Heinrich Rickert (1863-1936), mentionné par Weil au feuillet **6**, adopte une position dite « alogique » sur la question du nombre, il n'en est pas pour autant un empiriste.

Dès le premier paragraphe de l'exposé apparaît le terme de « logique pure ». La notion, qui faisait débat à l'époque, venait des *Prolegomena zur reiner Logik* (1900-1901)[3] de Husserl. Mais curieusement, le nom du philosophe n'apparaîtra pas tout au long de l'exposé : un indice que Weil se range plutôt du côté de Paul Natorp (1854-1924), lequel est mentionné six fois. Or, Natorp avait eu recours également au terme de « logique pure » qui, du reste, se trouvait déjà dans les *Leçons* de logique publiées par Jaesche d'après Kant. Husserl, qui était à la recherche d'un fondement purement théorique de la logique, voulait réfuter le psychologisme. Et les mathématiques n'étaient, à ses yeux, pas non plus réductibles à l'empirique. En ce sens, elles pouvaient être aussi dites pures. Toutes deux, logique et mathématiques, visaient selon lui des idéalités, à la différence des sciences du réel ou des faits. Natorp, pour sa part, a toujours maintenu un rapport entre logique pure et « logique transcendantale » kantienne, que Husserl jugeait cependant encore empêtrée dans ce qu'il appelait un « psychologisme transcendantal ». Et là où Natorp et Husserl s'opposaient encore plus, c'était dans la différence entre idéel et réel. Natorp avait en effet beau jeu d'argumenter contre Husserl[4] que le réel dépendait en fait de l'idéel, au sens précisément qu'il n'y a de donné que pour un sujet qui place le donné dans un système de relations *a priori*. Le jeune néokantien Weil ne pouvait donc ici suivre Husserl.

Selon Natorp, le rapport entre logique et mathématiques doit être pensé dans le cadre d'une théorie des fonctions logiques de la pensée pure, laquelle détermine synthétiquement, d'après ses propres catégories, l'objet à connaître. Dans son exposé, Weil renvoie au feuillet **6** à la notion d'un « principe originaire », que Natorp présente par exemple dès le début de son livre de 1910 [5]. Les mathématiques sont ainsi fondées logiquement selon une théorie de l'activité synthétique, dégagée de ses liens avec l'intuition pure kantienne, activité qui peut alors engendrer la suite des nombres naturels. Nous avons donc à faire à une logique transcendantale qui fixe les conditions de possibilité de l'objet à connaître. Position qui s'inscrit en faux contre le formalisme. En effet, la logique comme l'entend Natorp et qui défend les fonctions originaires de la pensée, s'oppose à la logique aristotélicienne, formelle, et qui renaissait à travers des contemporains comme Russell, Peano ou Couturat. Ceux-ci en effet, trop absorbés par le langage symbolique et les calculs des prédicats ainsi que des relations, oubliaient ce qui faisait de la logique une science réflexive, à savoir qu'elle était le produit non pas d'une analyse, mais d'une synthèse première. C'est le susmentionné David Hilbert qui, après Peano, Russell et Couturat, développera à l'extrême la logique dite symbolique : les mathématiques doivent être, selon lui, complètement formalisées, seule issue pour les fonder exemptes de toute contradiction. Ce qui aura pour conséquence une transformation de l'objet mathématique, qui ne sera par exemple plus le nombre ou la grandeur, mais les signes les désignant[6].

Cassirer, qui possédait une grande pratique des mathématiques, s'était quant à lui confronté à la philosophie des mathématiques dans l'ouvrage que cite Weil au feuillet **4**, *Substance et fonction*

[3] Edmund Husserl, *Prolégomènes à la logique pure*, in: *Kant-Studien*, VI, 1901, pp. 270-283.

[4] Pour mieux comprendre en détail la position de Husserl, nous recommandons l'article de Massimo Ferrari, « Cent ans après, Husserl, Natorp et la logique pure », in : Philosophie, *Néokantismes et phénoménologies*, Paris, Minuit, 2002, n° 74, pp. 40-57.

[5] Paul Natorp, *Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften*, Leipzig/Berlin, Teubner, 1910 (*Les Fondements logiques des sciences exactes*), pp. 22-26. Mais on peut aussi se rapporter au long article « Zu den logischen Grundlagen der neueren Mathematik », in: *Archiv für systematische Philosophie, Berlin*, G. Reimer, VII, 1901. Et en français : « Nombre, temps et espace dans leurs rapports avec les fonctions primitives de la pensée », in : Bibliothèque du Congrès international de philosophie, vol. I : *Philosophie générale et métaphysique*, Paris, Colin, 1900, pp. 343-389. Références que Weil a sûrement aussi en tête quand il mentionne Natorp sans donner de précisions autres que celles de l'ouvrage cité ci-dessus.

[6] David Hilbert, « Neubegründung der Mathematik », *Erste Mitteilung*. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität, t. I, 1922, pp. 157-177. Weil s'y réfère au feuillet **5**.

(1910)[7]. Il avait été amené à réviser la traditionnelle théorie des concepts, la logique d'alors n'étant plus capable à ses yeux d'affronter les nouveaux problèmes posés par les mathématiques et, plus généralement, par toutes les sciences exactes. Cassirer a été ainsi l'un des premiers à avoir compris que le concept de fonction en provenance des mathématiques allait modifier en profondeur la logique et la théorie de la connaissance. C'est justement dans le passage du concept d'*objet* au concept de *relation* qu'il voit le changement historiquement décisif qui s'opère dans les sciences de la nature. Il pointait ainsi le sens de la pensée transcendantale kantienne qui nous faisait passer du concept de *substance* (au sens d'Aristote) à celui de *fonction* (au sens de Leibniz). Au chapitre II de son livre, Cassirer s'attache de plus près au concept de nombre. Les étapes de sa démarche sont entre autres les suivantes : critique de la conception sensualiste de la déduction du nombre, présentation des *Fondements de l'arithmétique* de Frege, fondation logique du concept pur de nombre chez Dedekind et sa logique des relations, le nombre en tant que nombre ordinal, le concept de « classe », Russel et le nombre cardinal, le nombre irrationnel et le concept de « coupure » chez Dedekind.

Pour faire encore mieux ressortir la volonté de pureté de la part de certains mathématiciens de la fin du XIX^{e} siècle, il n'est pas inutile de rappeler ici les insuffisances du sensualisme et du psychologisme en la matière. Weil les évoque d'ailleurs par deux fois aux feuillets **5**. et **7**. Selon par exemple le philosophe anglais Stuart Mill (1806-1873), « être un nombre » serait pour un objet une qualité comme celles d'être grand, coloré ou savoureux. Si j'arrive à former le concept de trois, c'est que j'aurai perçu dans l'espace trois petits pains. Cassirer a alors beau jeu de montrer les limites d'une telle conception : le nombre 753684 présenterait ainsi par rapport à son prédécesseur ou son successeur une démarcation aussi nette que le nombre trois par rapport à deux et à quatre : « Mais qui pourrait localiser l'impression qui distingue l'une de l'autre l'intuition propre à chacun des ensembles appréhendés ? »[8]. On ne peut donc généraliser l'expérience primitive de dénombrement. Il me faut en fait pouvoir construire déductivement le nombre. Mais là s'offrirait encore une autre possibilité. En effet, au lieu de faire dépendre les jugements arithmétiques des objets physiques, c'est à la « conscience » que pourrait revenir la tâche de constituer la source des concepts mathématiques. Entendu comme réalité psychique, le nombre serait alors purifié de toute matérialité. Mais cette possibilité représenterait en fait une simple modification de la position sensualiste, car ce qui se présente à notre psychisme n'est qu'une représentation dépendant à chaque fois de chaque individu et variant selon les circonstances. Un nombre ou une somme peuvent être accompagnés d'une représentation spatiale chez l'un, mais pas chez l'autre. Or, « 7 + 5 = 12 » est par exemple une représentation qui « n'a rien à voir avec un enchaînement quelconque de représentations vécues »[9]. Depuis que le logicien allemand Frege s'était opposé à « l'arithmétique des petits pains et des cailloux » de Mill, le nombre ne pouvait plus être considéré comme la propriété de l'objet, mais comme celle d'un concept. L'exemple que cite Frege dans ses *Fondements de l'arithmétique* est connu : « Si je dis : le carrosse de l'Empereur est tiré par quatre chevaux, j'attribue le nombre quatre au concept : cheval qui tire le carrosse »[10]. Et Dedekind, qui suit une autre voie, est cependant également d'avis que le nombre est une émanation de la pure pensée.

Résumé de l'exposé

On trouve à la fin de l'exposé de Weil l'expression consacrée du « fait de la science » (feuillet **8**), fait qu'il s'agit toujours de soumettre à des conditions de possibilité et de validation. L'expression fait

---

[7] Ernst Cassirer, *Substanzbegriff und Funktionsbegriff. Untersuchungen über die Grundlagen der Erkenntniskritik*, Berlin, Verlag Bruno Cassirer, 1910 (Ernst Cassirer, *Substance et fonction. Éléments pour une théorie du concept*, trad. Caussat, Paris, Minuit, 1970).
[8] Ernst Cassirer, *Substance et fonction, op. cit.*, p. 43.
[9] Ernst Cassirer, *Substance et fonction, op. cit.,* p. 47.
[10] Gottlob Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik*, Breslau, 1884 (*Les Fondements de l'arithmétique*, tr. fr. C. Imbert, Paris, éd. du Seuil, 1969). Ouvrage mentionné par Weil au feuillet **1**.

écho au fameux *Faktum der Wissenschaften* d'Hermann Cohen (1842-1918), l'un des principaux représentants, avec Natorp et Cassirer, du néokantisme marbourgeois. Ce « fait » valait sans restriction pour les néokantiens de stricte obédience, mais il avait été évidemment dépassé depuis Kant par d'autres faits dus aux progrès de la science. Le jeune Weil adopte ainsi le point de vue néokantien au sens étroit, purement criticiste. Or, ce *factum* de la science est considéré par Weil comme le point de départ pour juger du rapport entre logique et mathématique. Mais l'entrée *in medias res* dans la problématique est plus précisément donnée au feuillet **1** par ladite « arithmétisation » des mathématiques, qu'on peut faire remonter à Karl Friedrich Gauss (1777-1855), mathématicien, astronome et physicien allemand, pour qui l'arithmétique était précisément « la reine des mathématiques ». Tendance radicalisée par le mathématicien allemand Felix Klein (1849-1925) qui exigea une intégrale « arithmétisation des mathématiques » de manière à garantir définitivement la connaissance mathématique[11]. Et c'est dans cette continuité qu'il faut inscrire les travaux d'Hilbert, mentionné cinq fois par Weil dans son exposé : en prouvant le caractère non-contradictoire de la géométrie, il établissait une reproduction « univoque » des propositions de cette science en termes d'arithmétique pure.

Weil s'interroge ainsi sur le statut et les modalités d'une logique et d'une mathématique pures. Soucieux d'exemplification, il s'intéresse dès l'abord aux nouvelles espèces numériques que représentent par exemple les nombres irrationnels, fractionnaires et négatifs, qu'il juge problématiques. Se pose en effet le problème de leur légitimité ou nécessité, problème qu'en fait Dedekind avait déjà signalé, en particulier pour ce qui est de la création des nombres irrationnels car, une fois ceux-ci introduits, comment définir alors les quatre opérations fondamentales d'addition, de soustraction, de multiplication et de division ? C'est à partir de ce qu'il nomme « coupure » (feuillet **2**) que Dedekind, suivi sur ce point par Russell et Couturat, a tenté de déduire le nombre irrationnel. Au feuillet **3**, Weil passe à la logique des relations et présente certains calculs sous forme de signes et d'opérations symboliques en provenance de la logique formelle. Il s'interroge sur les trois propriétés de ces relations que définit Russell : « aliorelativité », « transitivité » et « connexité ». Il s'attarde ensuite sur la querelle de la priorité de la théorie cardinale sur la théorie ordinale, querelle qu'il juge en fait oiseuse, car ces deux théories, certes différentes, doivent cependant être mises en corrélation (feuillet **4**). Vu que toutes deux sont soucieuses de fondements, Weil observe leur remontée à des principes simples. Pour Peano, Russell et Hilbert, l'approche psychologique, que l'on a évoquée ci-dessus, sert de repoussoir. Weil se penche ensuite plus précisément sur l'axiomatique de Hilbert dont le programme est de montrer l'impossibilité de contradictions en mathématiques (feuillet **5**). À la suite d'Hilbert, Weil s'intéresse alors aux axiomes pour eux-mêmes et, outre leur non-contradiction, il étudie leur indépendance, allant en cela contre Russell, Couturat et Natorp. Ce qui est dépasser la logique ou la mathématique : d'où le terme de « métamathématique » choisi par Hilbert à cet effet. Dans la mesure où le nombre est conçu selon les axiomes posés, la contradiction est évitée. Weil relève cependant que, pour Russell, il ne suffit pas d'échapper aux contradictions : il faut montrer en plus que logique et mathématiques sont identiques. Mais comme Natorp ne peut se contenter d'une telle identification, on doit s'enquérir avec ce dernier des fonctions originelles de la pensée (cf. *supra*) ou, avec Russell, préciser ce qu'on entend par « logique ». Or, il ne peut plus s'agir de la logique traditionnelle, aristotélicienne, mais cette logique sera dite pure, déductive, formalisée : selon les principes mathématiques de Russell, de pures « constantes logiques » (feuillet **6**), revêtant un aspect formel, suffisent ainsi à exprimer les propositions mathématiques. Une telle logique n'a pas de prétentions transcendantales, mais elle cherche à construire, et non pas à décrire le nombre (feuillet **7**). Suit tout un passage barré transversalement où l'on peut lire que, du point de vue d'une logique formelle, on ne peut pas nettement délimiter les mathématiques de la logique, et la « logique des origines » de Natorp, qui est une logique des relations, ne le permet pas davantage. Fondements mathématique et logique des mathématiques ne se font pas concurrence. On laissera simplement le soin aux mathématiques de se fonder elles-mêmes, c.-à-d. de construire leur objet.

[11] Felix Klein, « Über die Arithmetisierung der Mathematik », 1895, in: *Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, p. 392.

Dans le dernier paragraphe (feuillet **8**), Weil retient ce qui est commun aux théories cardinale et ordinale : le fait que le nombre doit être produit conceptuellement et non pas empiriquement. La logique formelle de Russell est dite une logique d'abstraction violente, vu que les mathématiques font apparaître son erreur consistant à négliger les caractères distinctifs des objets. La tâche d'un fondement logique des mathématiques n'est pas d'abstraire, mais de prouver l'opérativité des fonctions de la pensée. Mais pour ce qui est du fondement mathématique des mathématiques, ce n'est pas à la logique de le fournir.

S'il est vrai que les deux logiques, la logique tout court et la logique immanente des relations mathématiques, sont essentielles l'une à l'autre, du point de vue des fondements, la position que Weil adopte est celle de la concession partielle et de la limitation réciproques des frontières entre logique et mathématiques.

Prolongements

L'exposé portera encore ses fruits quelques années plus tard où Weil fera en 1932 la recension d'un ouvrage de Walter Dubislav sur *La Philosophie des mathématiques dans le présent*[12]. Il était en effet maintenant bien armé pour une telle tâche. La Présentation de cette recension fut pour nous l'occasion de revenir à un moment de l'histoire des mathématiques et de prendre la mesure des recherches des six années qui s'étaient écoulées depuis l'exposé de Weil.

C'est que cette « crise » des fondements des mathématiques imposait des tâches nouvelles à la philosophie. Un auteur comme Jean Ladrière l'a bien vu : « Il n'est plus possible, désormais, de s'interroger sur la nature des objets mathématiques ou sur les procédés de la pensée mathématique sans tenir compte de tous les résultats qui ont été obtenus par la nouvelle science des fondements, grâce aux efforts conjugués des logiciens et des mathématiciens soucieux de la solidité de leur science. » (Avant-propos, VII).[13] On peut considérer que le Weil de la maturité aura laissé la tâche de résoudre ces nouveaux problèmes au spécialiste, titre auquel il ne pourra plus prétendre par la suite, faute d'avoir continué à se spécialiser. Ce qui par contre le préoccupera de plus en plus, ce sera de réfléchir, en connaissance de cause, sur la science en général ainsi que sur les problèmes que posent le fait et le discours scientifiques du point de vue d'une philosophie des valeurs et du sens.

[12] « Walter Dubislav, a. o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Berlin, *Die Philosophie der Mathematik in der Gegenwart*, (Philos. Forschungsberichte 13.) Junker & Dünnhaupt, Berlin, 1932, VIII und 88 S ». La recension a été publiée dans les *Kant-Studien*, 38, Heft 1-2, 1932, p. 203. À l'époque, Erich Weil était coresponsable avec son collègue Helmut Klein de la partie réservée aux critiques des *Kant-Studien*. Texte et traduction (avec présentation) sont disponibles en ligne sur le site de l'*IEW*.

W. Dubislav (1895-1937), étudiant chez Hilbert à Göttingen, fut nommé en 1928 *Privatdozent* en philosophie des mathématiques et des sciences naturelles à la *T. U. Berlin* et devint Professeur titulaire en cette même ville en 1931. Dans un article de la même année touchant à notre matière, il avait, adoptant un point de vue épistémologique, retenu quatre orientations philosophiques ayant tenté d'apporter une solution à ladite crise des fondements des mathématiques : le criticisme, le logicisme, l'intuitionnisme et le formalisme. Cf. « Die Philosophie der Mathematik in der Gegenwart » *(Philosophische Forschungsberichte* 13), Berlin, Junker & Dünnhaupt, 1932.

[13] Cf. Jean Ladrière, *Les limitations internes des formalismes. Étude sur la signification du théorème de Gödel et des théorèmes apparentés dans la théorie des fondements mathématiques*, Louvain, Nauwelaerts/Paris, Gauthier-Villars, 1957.