# Mathematische Logik und Logik der Mathematik.

In der Geschichte der Mathematik ist eine der auffälligsten Erscheinungen die Regelmäßigkeit, in der Epochen einer eigentlich rein sachlich gerichteten Arbeit von solchen abgelöst werden, in denen man sich bemüht, die vorigen Resultate zu sichern. Gerade die letzte Zeit ist von dem Vorspiel einer solchen Sicherung erfüllt: ~~Gerade das Jahrhundert des letzten Jahrhunderts~~ Die sogenannte Arithmetisierung der Mathematik, hat dieses Bedürfnis in ganz besonderem Maße hervorgebracht. ~~Die~~ Arbeiten von Weierstraß, Dedekind, Frege, Cantor, Hilbert, Russel, Lorentzat Peano, um nur einige der Wichtigsten zu nennen, haben das Bestreben, zu zeigen, wie die Mathematik in ihrer besonderen ~~Logik~~ geschichtlich vor sich kommt. Es sollen im Folgenden nicht die speziellen ~~Probleme~~ dieser Forschungen behandelt werden. Es soll vielmehr gefragt werden, was eigentlich logische Sicherung der Mathematik bedeutet und versucht werden, festzustellen, wieweit wenn Logik und eine Mathematik zusammengehören, und wieweit sie prinzipiell auseinanderfallen.

Gehen wir von einem konkreten Beispiel aus: Die Irrationalzahl wird in der ganzen antiken Zeit unbedenklich verwendet. Erst in der 2. Hälfte des 19. Jahrhunderts beginnt man zu fragen, was denn eigentlich diese Irrationalzahl sei, und mit welchem Recht man sich ihrer bedienen. ~~Aber~~ — es ist ~~keineswegs~~ nötig, dieses so zugespitzte klassische Problem aus der Grundlegung der Mathematik als Beispiel zu wählen. Man kann Begriffe, die auf den ersten Blick ziemlich unkompliziert sind, wie die des Bruchs oder der negativen Zahl heranziehen. In der Tat ~~"und~~ bedeutet es, wenn wir von $-2$ oder von $1/5$ sprechen. — Man kann nun, ~~wie wir noch das Beispiel sehen werden~~, diese Begriffe vorläufig einfach rechtfertigen, wenn die sogenannten natürlichen Zahlen vorgegeben sind, und man hat sich eine Zeit lang das Problem wirklich in dieser Richtung vorgestellt, indem man mit ~~dem alten~~ Kronecker sagte: "Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott geschaffen, alles Übrige ist Menschenwerk." Aber im Grunde ist — ~~leicht~~ gesehen, daß diese Ableitung auf der ganzen Linie vollständig verfehlt — damit das ~~eigentliche~~ Problem, das nur verschoben und die wesentliche Aufgabe, die Darstellung des Zahlbegriffs, in keiner Weise gelöst. So entstehen dann nun die gleich zeitig die Arbeiten von Dedekind und Frege, deren Grundgedanken auch heute noch maßgebend ~~geblieben~~ sind; dann die beiden Hauptrichtungen, die ordinale und die kardinale Theorie, in der letzten Zeit hauptsächlich vertreten von Hessenberg einerseits, Russel und Whitehead und ihren wesentlichen Gegnern — bei

und logisch fundiert

Problemstellungen u. -lösungen

übrigens

ist keineswegs auf den ersten Blick klar,

wenigstens, wenn man es von der Seite der Logik sieht,

Propriété de l'Université de Lille, Université de Lille

In der Geschichte der Mathematik ist eine der auffälligsten Erscheinungen die Regelmäßigkeit, in der Epochen einer eigentlich rein dort geschaffenen Arbeit von solchen abgelöst werden, in denen man sich bemüht, die vorigen Resultate zu sichern. Gerade die letzte Zeit ist von dem Vorspiel einer solchen Sicherung erfüllt: ~~Gerade das Jahrhundert des letzten Jahrhunderts~~ Die sogenannte Arithmetisierung der Mathematik, hat dieses Bedürfnis in ganz besonderem Maße hervorgebracht. ~~Die~~ Arbeiten von ~~Gauß~~, Dedekind, Frege, Cantor, Hilbert, Russel, Lonterat, Peano, um nur einige der Wichtigsten zu nennen, haben das Bestreben, zu zeigen, wie die Mathematik in ihren Bestandteilen ~~und Begriffen~~ aufgestellt war. und logisch fundiert

Es sollen im Folgenden nicht die speziellen ~~Probleme~~ Problemstellungen u. -lösungen dieser Forschungen behandelt werden. Es soll vielmehr versucht werden, nur eigentlich logische Sicherung der Mathematik bedeutet und versucht werden, festzustellen, wieweit neue Logik und reine Mathematik zusammengehören, und wieweit sie prinzipiell auseinanderfallen.

Gehen wir von einem konkreten Beispiel aus: Die Induktionsaufgabe wird in der ganzen neueren Zeit außerordentlich verwendet. Fast in der 2. Hälfte des 19. Jahrhunderts beginnt man zu fragen, was dann eigentlich diese Induktionsaufgabe sei, und mit welchem Recht man sich ihrer bedienen. ~~Aber~~ – es ist übrigens keineswegs nötig, dieses so zu sagen klassische Problem aus der Grundlegung der Mathematik als Beispiel zu wählen. Man kann Begriffe, die auf den ersten Blick fördert unkomplizierte sind, wie die des Durchschnittes oder der negativen Zahl, heranziehen. In der Tat ist keineswegs auf den ersten Blick klar, was bedeutet ist, wenn wir von – 2 oder ~~wie~~ 1/5 sprechen. – Man kann nun, ~~wie wir noch das Wesen ge-sehen werden~~, diese Begriffe vorläufig einfach rechtfertigen, wenn die sogenannten natürlichen Zahlen vorgegeben sind, und man hat sich eine Zeit lang das Problem wirklich in dieser Richtung vorgestellt, indem man mit ~~dem alten~~ Kronecker sagte: "Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott geschaffen, alles Übrige ist Menschenwerk." Aber im Grunde ist – ~~falsch~~ gesehen, daß diese Arbeitung auf der ganzen Zahl vollständig verlegt – damit das ~~eigentliche~~ Problem, wenigstens, wenn man es von der Seite der Logik sieht, der nur verschoben und die wesentliche Aufgabe, die darstellung des Zahlbegriffs, in keiner Weise gelöst. So entstehen dann nun die gleich zeit die Arbeiten von Dedekind und Frege, deren Grundgedanken auch heute noch maßgebend ~~geblieben~~ sind; dann die beiden Fortschritten, die ordinale und die kardinale Theorie, in der letzten Zeit zunächst entstanden von Cantor einerseits, Russel andererseits, sind ihrem wesentlichen Gehalt nach – bei allen bedeutenden und z.T. auch einschneidenden Reformen –

Propriété de l'Institut Emile Picard, Université de Lille

auf diese beiden zurückführen. — Die Dedekind'sche Ableitung der Irrationalzahl hat zum Prinzip den Begriff des Schnittes. Wenn man das System der rationalen Zahlen als stetig erkennt, und diese Stetigkeit (~~nach~~ Dedekind ~~postuliert~~), so definiert jede Zahl einen Schnitt derart, daß sämtliche rationalen Zahlen in 2 Klassen geteilt werden können, in denen erstere jedes Glied (~~größer~~ als diese Zahl ist, während die 2. die größeren enthält. Umgekehrt, und das aber ist im Postulat der Stetigkeit enthalten, jede eine und nur eine Zahl existieren, durch die ~~diese~~ Schnitt hervorgebracht ist. Wird also bewiesen, daß V2 keinem rationalen Mod entspricht, so ist damit, kraft unseres Stetigkeitspostulats, die Existenz einer neuen Zahl gegeben, und durch den Schnitt ist es möglich, die Bedingungen für Gleichungen und Ungleichungen dieser irrationalen Zahlen untereinander und mit den Rationalzahlen aufzustellen. Aber, könnte man hergegen sagen, und das hat z. B. Frege gesagt, diese Art, das Notwendige kraft Postulates hervorzustellen, ist reichlich einfach. Eben in diesem Schaffen der neuen Zahl liegt der Kern der Sache. „Hier handelt es sich um die Frage", sagt er (Grundges. § 139), „ob ein ~~peltes~~ Schaffen überhaupt möglich sei; ob es, wenn möglich, ohne Willkür möglich sei, oder ob gewisse Gesetze beim Schaffen beachtet werden müssen. Im letzten Falle wäre es zu beweisen, daß jenen Gesetzen gemäß die Berechtigung zum Schaffen bestände, bevor man die Schöpfung vollziehen dürfte. Diese Untersuchungen fehlen hier vollständig, und damit fehlt die Grundlage, es fehlt das, wovon die Berechtigung der Begriffe abhängt, die mit Irrationalen Zahlen gebildet werden." Sieht man jedoch genauer auf den Begriff von Zahl bei Dedekind, so läßt sich dieser Einwand heben. (Stetigkeit u. irrationale Zahl, S1): „Ich sehe die ganze Arithmetik als eine notwendige oder wenigstens natürliche Folge des einfachen arithmetischen Aktes, das Zählen an, und das Zählen ist nicht anders als die fortwährende Schöpfung der immerfort neuen Reihe der positiven ganzen Zahlen, in welcher jedes Individuum durch das unmittelbar vorhergehende definiert wird." ~~Der Aufbau der Arithmetik muß sich in der 2. Hälfte des Satzes von selbst auf~~. In der Tat ist das Zählen als Grundhandlung nur die fortwährende Schöpfung einer immerfort neuen Reihe, deren Glieder durch nichts als ihre Stelle, d. h. durch ihre Relation zu den übrigen bestimmt sind, so ist die Zahl auf den Begriff der ursprünglichen Ordnung reduziert, welcher Begriff zwar von jeder Schöpfung einer Ordnung vorausgesetzt, aber als eine Tatsachenfaktion niemals erschöpft werden kann. Ist aber die natürliche ganze Zahl nur ein spezieller Relationsbegriff, so ist gegen die Einführung neuer Formen, wenn sie widerspruchsfrei gestattet, keine Einwand zu erheben, ~~Man~~ allerdings auch Frage zugegeben ist, daß die Darstellung Dedekinds zu einseitig in mancherlei Hinsicht fordert. ~~Aber~~ z. B. ~~Russell~~

„Aber" sagt ~~Man~~ ... „mit Alledem weiß ich nicht, was die Zahl ist" — Dann ~~kann~~ er auch die Kritik der Dedekind'schen ~~Definition~~ unterlassen ~~wird~~ durch die Kritik

Sportlich

Kleinen

Propriété de l'Institut Emile Wilmotte de l'Université de Liège

tionalen Zahlen in 2 Klassen geteilt werden können in denen erstere jedoch Glieder ~~[illegible]~~ als diese Zahl ist, während die 2. die größeren umfaßt. Nun geht und das aber ist im Postulat der Natürlichkeit enthalten, eine und nur eine Zahl existieren, durch die ~~diese~~ eine Schnitt hervorgebracht ist. Wird also bewiesen, daß V2 keinem rationalen Wert entspricht, so ist damit, kraft unseres Natürlichkeitspostulats, die Existenz einer neuen Zahl gezeigt, und durch den Schnitt ist es möglich, die Bedingungen für Gleichungen und Ungleichungen dieser irrationalen Zahlen untereinander und mit den Rationalzahlen aufzustellen. Aber, könnte man fragen sagen, und das hat z. B. Frege gesagt, diese Art, das Natürliche kraft Postulates festzustellen, ist reichlich einfach. Eben in diesem Schaffen der neuen Zahl liegt der Kern der Sache. „Hier handelt es sich um die Frage", sagt er (Grundges. § 139), „ob ein ~~[illegible]~~ Schaffen überhaupt möglich sein; ob es, wenn möglich, schon deshalb möglich sei, oder ob gewisse Gesetze beim Schaffen beachtet werden müssen. Im letzten Falle wäre es zu beweisen, daß jene Gesetzen genau die Berechtigung zum Schaffen bestätigen, wenn man die Schöpfung vollziehen dürfte. Diese Untersuchungen fallen hier vollständig, und damit fällt die Grundfrage. Es fällt das, wovon die Brauchbarkeit der Begriffe abhängt, die mit Irrationalen Zahlen gebildet werden." Bisher wenn jedoch Cantor auf den Begriff von Zahl bei Dedekind, so läßt sich Einiges finden. (Natürlichkeit u. irrationale Zahl, 91): „Ich sehe die ganze Arithmetik als eine notwendige oder wenigstens natürliche Folge des einfachen arithmetischen Aktes, das Zählens an, und das Zählen ist nicht anders als die fortgesetzte Schöpfung der natürlichen Reihe der positiven ganzen Zahlen, in welcher jedes Individuum durch das unmittelbar vorhergehende definiert ist." ~~Der Aufbau [illegible] Arithmetik muß sich in der 2. Hälfte des Jahrhunderts selbst auf.~~ In der Tat beruht das Zählen als Grundlegung nur die fortgesetzte Schöpfung ~~der~~ einer natürlichen Reihe dann weiter nichts als ihre Stelle, d. h. durch ihre Relation zu den übrigen bestimmt ~~ist~~ sind, so ist die Zahl auf den Begriff der ursprünglichen Ordnung reduziert, welcher Begriff zwar von jeder psychologischen Abbildung vorausgesetzt, aber als eine Denkfunktion niemals erschöpft werden kann. Ist aber die wirkliche ganze Zahl nur eine pleno Relationsbegriff, so ist gegen die Einführung neuer Formen, wofern sie widerspruchsfrei gesichert, keine Einwand zu erheben, ~~Man~~ allerdings auch Frage zugegeben ist, daß die Darstellung Dedekinds zu einseitig in mancherlei formal fordert. ~~Aber~~ z. B. ~~Durch~~

„Aber" sagt ~~Frege~~ ... „mit Alledem weiß ich nicht, was die Zahl ist" — Denn ~~wenn~~ er auch die Vorzüge der Dedekindschen Zahlendeutung anerkennt, ~~[illegible]~~ Durchaus die Vorzüge seiner Theorie vor den psychologischen Theorien und vor allen Dingen vor den geometrischen formalen Theorien z. B. von Helmholtz, ~~die sie übrigens [illegible] bei der Darstellung~~

Propriété del Instituto Mexicano, Universidad Iberoamericana

~~der Gilbertschen Lehre [illegible] auffassen~~, sieht, so ist doch an dem ganzen Aufbau seiner eigenen Begründung sehr deutlich, wie fern ihm die dedekindsche Grundkonzeption, nämlich der Begriff der reinen Ordnung, trotz seinem Denkens, ein wenn gar in sehr undeutlichen Konnex, aber durchaus dedekindschen Gedanken liegen darf, ~~liegt~~. Eine Definition hat nicht von diesem Begriffe, das der ordinalen Bestimmung ~~zugrunde~~ ~~zugrunde~~ zugrunde scheint. Wie ihm und für Russel gibt es keine ursprüngliche Setzung des Denkens, bedeutet den Ausgangspunkt bilden im Gegensatz zu dieser „Willkür", wie sie es nennen würden. Die Definitionen der einzelnen Zahlen, auf die dann die Ordnung ihrerseits wiederum gemäß und logisch definiert ~~entgegenstehen~~ sind. Wir gehen aus von Begriff der Menge und dem Begriff der Relation. Zunächst Definition wie das Folgende nach Russel, Einführung in die mathematische Philosophie und Tractatus, die philosophischen Prinzipien der Mathematik) eine ein-eindeutige Beziehung; sie liegt vor, wenn ein Element x eine Beziehung zu y hat und kein x' bzw. y' für das Letztere kommt, also sowohl x R y' und x' R y falsch sind. Zwei Mengen sind nun äquivalent, wenn ihre Glieder sich eindeutig einander zuordnen lassen, und per definitionem ist die Zahl einer Menge die Menge aller ihr ähnlichen Mengen. Damit ist zunächst die Möglichkeit gegeben, zu entscheiden, ob 2 Zahlen gleich oder ungleich sind. Gleich heißt identisch; aber es ist als Basis unmöglich, das Ungleich im Größer und Kleiner zu halten, da von Ordnung ~~bis jetzt~~ noch nicht die Rede war. Jetzt verwenden wir die Reihenbeziehung, d.h. Beziehungen die asymmetrisch, transitiv und zusammenhängend sind, mit anderen Worten, wenn die Beziehung R heißt, so ist x R x immer falsch, aus x R y und y R z folgt x R z und R muß mit jedem beliebig gewählten Paar einerseits Beziehung herstellen. Wenn wir ferner 1 als den Nachfolger von 0, 2 als den von 1 u.s.w. definieren, insbesondere allgemein die natürlichen Zahlen als die Nachkommenschaft der 0 ausschließlich der Beziehung ununterbrochen kontinuierlich fassen, so können wir sagen, eine induktive Zahl n heißt kleiner als eine andere u, wenn u jede endliche Folge heißt das Nachfolgers von n besitzt. Damit ist die natürliche Größenordnung geschaffen, und da für die natürlichen Zahlen ordinal ist, kann jetzt die Aufgabe äußerlich wie bei den übrigen Theoretikern behandelt werden, wenn auch Russel z.b. die Tätigkeit nicht zu positivem braucht, sondern auf Grund einer Definition als Merkmal der Zahl einführen kann und so die Iteration zahl als ein Segment in der Reihe der Brüche, das keine Grenze besitzt, darstellt. ~~Aber~~

Aber in diesen genannten ~~ein logisch~~ Dar, die alten ~~[illegible]~~ Theorie steckt eigentümlich Schwierigkeit.

für den ungeschulten Leser

Unbestimmtheit

Gleichzahligkeit, wenn der

Propriété de l'Institut Éric Weil, Université de Lille

Brief Hilbert [illegible], [illegible] Cantor [illegible] wohl
sinnlichen Zeitmaß, aber durchaus dadurch den Gedanken
gegen darf, ~~liegt~~. Eine Definition hat nicht von diesen Be-
griffen, daß der ordinalen Bestimmung ~~zugeführt~~ ~~ausgeführt~~ für ihn ausgeführten
scheint. Sie ist und für Russel gibt es keine ursprüngliche Tat-
sache des Denkens, bedeutet den Ausgangspunkt bilden im
Gegensatz zu dieser ~~Willkür~~, wie sie es nennen würden, Unbestimmtheit
die Definitionen der einzelnen Zahlen, auf die dann die
Ordnung ihrerseits wiederum genau und logisch defi-
niert ~~entgegenstehen~~ wird. Wir gehen aus vom Begriff der Gleichzahligkeit, dem der
Menge und dem Begriff der Relation. Zunächst definieren
wir das Folgende nach Russel, Einführung in die mathe-
matische Philosophie und Principia (die philosophischen
Prinzipien der Mathematik) die ein- eindeutige Be-
ziehung: sie liegt vor, wenn ein Element x ~~einen~~ eine
Beziehung zu y hat und kein x' bzw. y' ~~für sie~~ zu ihnen kommt,
also wenn x R y' und x' R y falsch sind. Zwei Mengen
sind nun ähnlich, wenn sie sich eindeutig ein-
eindeutig zuordnen lassen, und per definitionem
ist die Zahl einer Menge die Menge aller ihr ähn-
lichen Mengen. Sodann ist zunächst die Möglichkeit zu
geben, zu entscheiden, ob 2 Zahlen gleich oder ungleich sind.
Gleich heißt identisch; aber es ist bis hierhin unmöglich, das
Ungleich in Größer und Kleiner zu halten, da eine
Ordnung ~~bis jetzt~~ noch nicht die Rede war. Hierzu verwenden
wir die Reihenbeziehung, d.h. Beziehungen die aliornativ,
transitiv und zusammenhängend sind, mit anderen Worten
wenn die Beziehung R heißt, so ist x R x immer falsch,
aus x R y und y R z folgt x R z und R muß auf
jedes beliebig gewählte Paar unter Umständen Anwendung
haben. Wenn wir sowas f als den Nachfolger von
0, 2 als den von 1 u.s.w. definieren, insbesondere
allgemein die natürlichen Zahlen als die Kettenmen-
gen der 0 hinsichtlich der Beziehung unmittelbarer Vor-
gänger fassen, so können wir sagen, eine individuelle
Zahl n heißt kleiner als eine andere m, wenn n
jede endliche Zahl nach dem Nachfolgerset von m
besitzt. Somit ist die natürliche Größenordnung ge-
schaffen, und da für die natürlichen Zahlenreihe ge-
nügt ist, kann jetzt die Aufgabe ähnlich wie bei den
übrigen Theoretikern behandelt werden, wenn auch Russel
z.B. die Natürlichkeit noch zu retten versucht, indem
auf Grund einer Definition als Klassen der Zahl zu-
rückgehen kann und so die Transfinitenzahl als ein
Segment in der Reihe der Brüche, das keine Grenze
besitzt, darstellt. ~~Aber~~

Aber in diesen Bemühungen ~~ein logisch~~ der
~~[illegible]~~ Theorie stecken eigentümliche Schwierigkeiten. Betrachten wir die Definition der 1, in dieser Theorie
(nach Couturat): Wir sind man nun ausdrücken, daß
eine Klasse a singulär ist, d.h. nur ein Individuum ent-
hält (daß es nur ein a gibt)? Man wird zunächst ausdrücken,

Propriété de l'Institut Henri Poincaré de l'Université de Lille

dass sie existiert (nie null ist), und sodann, dass 2 beliebige Individuen, wenn sie ihr angehören, identisch sind. In Zeichen: $a = 1 : \varepsilon \Sigma a . \varepsilon \Sigma a \cdot )_{x,y} . x \equiv y$. Hierin liegt gleichzeitig die logische Definition der Zahl 1, ebenso wird die Definition der 0-Klasse die logische Definition der Zahl 0 ist. Und diese beiden Definitionen sind jedenfalls zirkelschlüssig entrückt, da sie nur die logischen Bezeichnungen z.B. und die der Identität und Verschiedenheit zwischen Individuen enthalten, wie wir sie weiter oben definiert haben." (Couturat S. 27f.) Hingegen wird man zunächst (nach Cassirer, Substanzbegriff S. 65f.) einwenden, dass im diesem Begriff des Individuums implizite ja schon der Begriff der Zeitreihe steckt, und wenn man auch zugeben kann dass in diesem Begriff der Zeitreihe die Zahl 1 noch nicht begriffen sei, so ist doch zum mindesten die Fähigkeit, diese und jene als in Relation stehend zu begreifen, gefordert. Das ist aber nicht anderes als das Vorhandensein der Ordinalen Zahl, die gerade hier, in der Reduktion der Mengenlehre Grundsätze, auf die rationale zurückgeführt werden sollte. Allerdings, ob nicht trotzdem diese Auflösung gegenüber der reinen ordinalen Theorie, wie sie z.B. Notorz, soll man annehmen, vertritt, einen notwendigen Schritt auf dem Wege der Begründung bedeutet ist noch zu untersuchen. Notorz sei noch auf einen anderen Zusammenhang zwischen den beiden Begründungsmethoden hingewiesen. Wenn Frege und Russell vom Begriff der Gleichzeitigkeit ausgehen, und, wie oben gezeigt ist, von hier aus zunächst die einzelnen Zahlen, dann die Ordnung, konstruieren, so ist damit doch wohl das eigentliche Wesentliche, nämlich die Ordnungsfunktion der Zahl, zu ebenso Selbstverständlichem gemacht. Was bedeutet aber die Zahl vor der Ordnung? Man wird sich wohl dahin entscheiden müssen, dass sie einen ganz bestimmten begrifflichen Sinn, dass weiter unten genauer bestimmt werden soll, den man aber vorläufig gleichsam hier vorn die Arithmetische Logik nennen, die ordinale Theorie abgelehnt worden ist. Aber mit dem Nachweis dass die Kardinaltheorie die Ordinaltheorie zur Voraussetzung hat, ist noch keineswegs ausgeschlossen, dass eine ordinale Theorie zur Begründung des Zahlbegriffs ausreicht. — Ich meine als fundamental begründet in der ursprünglich geometrischen Zeitreihe, die Relation, und geht dann zu den Relationstypen über, so kann man zwischen das eine, das andere, noch eine andere, u.s.f. einschalten, aber damit ist nicht mehr gegeben, als die Möglichkeit der Ordnung, und ob sie wirklich schon die Zahl vorbereitet, ist zum mindesten zweifelhaft. Wenigstens sehe ich nicht, wie man von hier aus zu helfen versuchen der Klassenlehre den Übergang von der Zahlenreihe zur Zahl machen will. Ordinalzahl und Anzahl (gibt Notorz zu) ~~sind~~ beide begrifflich verschieden sind, ist ebenso klar wie dass mit jeder dieser Arten der Zahlenreihe die Möglichkeit für die andere gegeben ist. . . . . Indessen so ein Fortschritt, da gibt es notwendig auch der Zahl vorauf. es ist ja oben ein Fortschritt, nur Fort. und so ein Fortschritt, da gibt es (weil jeder Fortschritt auch ein Fortschritt) notwendig zwei i.s.v. (Grundlagen 3, §2.) Dazu ist nur das eine zu sagen, dass dies gerade, was ja vermieden werden sollte, die Mengentheoretische Begründung ist, bei der dieses weil die Zahlen als die Mengen fungieren. Es spricht also das beide Theorien auf einander angewiesen sind. Die eine nicht nur, bis zur Zahl zurückgehen, die andere führt eben den Begriff der Zahl nicht genügend weit zurück. ~~Gerade~~

Gerade aber indem, wenn ~~beide~~ beide Theorien fehlen,

V von Logik.

Propriété de l'Institut Jean Vrin - Université de Lille

wollt, da sie die Möglichkeit gewissen Urteilen entspalten, die sie zuvor oben definiert haben." (Couturat S. 27) Hingegen wird nun zunächst (nach Lassiter, Höffding, Begriff S. 65f.) einzuwenden, daß im diesem Begriff des Urteilens implizite ja schon der Begriff der Tatsache steckt, und wenn man auch zugeben kann, daß im diesem Begriff der Tatsache die Frage 1 noch nicht begriffen sei, so ist doch zum mindesten die Fähigkeit, dieses und jenes als im Kalkulieren stände zu begreifen, gefordert. Das ist aber nicht anderes als das Verfahren der Ordinalen Logik, die gerade hier, in der Reduktion der Prämissen Grundsätze, auf die Kardinale zurückgeführt werden sollte. Allerdings, es ist trotzdem diese Auflösung gegenüber der reinen ordinalen Theorie, wie sie z.B. Nelson, soll man betrachten, vertritt, einen notwendigen Schritt auf dem Wege der Begründung, bedenkt ist ist noch zu untersuchen. Nelson sei noch auf einen anderen Zusammenhang zwischen den beiden Begründungsmethoden hingewiesen. Wenn Frege und Russell von Begriff der Gleichzeitigkeit ausgegangen, und, wie oben gezeigt ist, von hier aus zunächst die einzelnen Zahlen, dann die Ordnungskonstruktionen, so ist damit doch noch das eigentliche Moment, nämlich die Ordnungsfunktion der Zeit, aber Bekanntes genommen. Was bedeutet aber die Zeit für die Ordnung? Wenn wird sich noch dahin entscheiden müssen, daß für einen ganz bestimmten Begriffskreis, der zwar unten genommen bekannt sein soll, dem man aber vorsätzlich sehr nahe von die Aristotelische Logik nicht kann, die ordinale Theorie abgelehnt werden ist. Aber mit dem Nachweis daß die Kardinaltheorie die Ordinaltheorie zur Voraussetzung hat, ist noch keineswegs erdacht, daß die ihr entsprechende Theorie zur Begründung des Zeitbegriffs nicht reicht. — Ist man also fraglich begründet in der ursprünglich psychologischen Tatsache, die Kalkulation und Zeit dann zu den Kalkulationsformen über, so kann man zwar das eine, das andere noch eine andere, u.s.f. unterscheiden, aber damit ist nicht mehr gegeben, als die Möglichkeit der Ordnung und ob sie wirklich schon die Zeit verlangt, ist zum mindesten zweifelhaft. Wenigstens sehe ich nicht, wie man von sie ohne zu fehlen, mehr der Klassenlehre den Übergang von der Zeitfolge zur Zeit machen will. Ordnungszeit und Anzeit (gibt Nelson zu) sind beide begrifflich verschieden sind, ist ebenso klar wie daß mit jeder dieser Arten der Zeitfolgung die Möglichkeit für die andere gegeben ist. . . . . Indessen es ein Fehler, da gibt es notwendig auch der Zeit noch Zeit. es ist ja oben kein Fehler, nur Zeit. und es ein Zeitfehler, da gibt es (weil jeder Fehler auch ein Fehler) notwendig Zeit, i.s.w. (Grundlagen 3, §2.) Dagegen ist nun das eine zu sagen, daß dies gerade, weil ja vorausgesetzt werden sollte, die Mengenlehrerische Begründung ist, bei der dieser Zeitbegriff fehlen, als die Mengen fundamental gefunden sind. Es scheint also daß beide Theorien auf einander ganz verschieden sind. Die eine weiß nicht aus, bis zur Zeit zu gelangen, die andere fühlt eben den Begriff der Zeit nicht genügend zeitgemäß. ~~Gerade~~

Gerade aber indem seien beide Theorien fehlen und am Klarsten, weil sie eigentlich beschlossen. Soll begründet werden, so setzt diese Begründung nicht anderes als Zurückführung auf logisch einfachere Begriffe. Es ist klar, daß eine solche Zurückführung nicht im Unendlichen gehen kann.

V von Logik.

Propriété de l'Université de Genève

Man sind also bei einer gewissen Umgestaltung von Grundbegriffen und Grundsätzen stehen bleiben müssen. Liegt man aber auf die verschiedenen Systeme, die von den verschiedenen Mathematikern, wie Boole, Russel, Gilbert, aufgestellt sind, so ~~ist~~ scheint man oft sich nicht, als ~~es eine völlig logische~~ Ursprung das Band, die Radicalfrage, die Frage nach Richtigkeit des Zählens auf das Bestehen. ~~zu erkennen~~. Man hat sich nur zu entscheiden, in welchem Sinne man diese Vereinfachung vornehmen kann. Von Begründung der Mathematik sprechen alle drei. Und daß es sich um eine logische Begründung ~~kein logischen Sinne~~ gegenüber irgendwelchen psychologischen oder sachlichen Vorsätzen handelt, ist ohne weiteres klar. Zu tragen ist nur, wie weit diese Begründung auf rein logische zurückgeführt, und wie sich mit der Identität oder ~~partiellen Identität~~ Abhängigkeit die von Russel und Couturat ebenso wie von Natorp, allerdings von recht verschiedenen Standpunkten aus behauptet sind, verhält. Um zunächst von der Seite der Mathematik her eine Bestimmung zu finden, wandern wir uns zu einer Form der Urteilsfindung, die im Gegensatz zu allen in der jüngstvergangenen logisch orientierten Versuchen rein von innerem Interesse der Mathematik ausgeht und auch keinerlei Voraussetzung logischer Lehren außerhalb der Mathematischen Bereichs aufzufinden — nämlich der Axiomatik, wie sie Gilbert vertritt. „Es genügt nicht" — Das kann man vielleicht als Programm aufstellen — „sondern Widerspruchsfreiheit zu vermeiden, wenn der durch sie gesicherte Ruf der Mathematik als Muster strenger Wissenschaft wiederhergestellt soll: die prinzipielle Forderung der Axiomatik muß vielmehr verlangen, nämlich dahin, zu erkennen, daß jedesmal innerhalb eines Wissensgebietes auf Grund des aufgestellten Axiomensystems Widerspruchsfreiheit bewiesen zu möglich sind." (Axiomatisches Denken S. 417 Mathemat. Annalen 78). Die Unmöglichkeit solcher Widerspruchsfreiheit zu zeigen ist die Aufgabe eines Beweises, der aber von Gilbert selbst sehr klar erkennt (Logische Grundlagen d. M., M. A. 88, S. 153. und Neubegründung d. M. 165) nicht mehr der eigentlichen Mathematik angehört, sondern einer Wissenschaft, die er Metamathematik nennt. Der Gang eines Beweises ist nun kurz folgender: Wir formalisieren den ganzen Bestand der Mathematik und reihen noch dazu, um zu sämtlichen Formeln zu kommen, mit einer bestimmten Anzahl von Sätzen auskommen, die alles Übrige nicht noch bestimmten Sätzen hervorbringen. Alle Tatsächlichen Überlegungen ist auf die so formalisierten Mathematik verlegt. — Man kann und in das Gebiet der Metamathematik verlegt. — Man kann sagen, daß der Beweis der Widerspruchsfreiheit fast ~~tatsächlich~~ vollständig vorliegt. — Das eigentliche Verfahren soll für ~~uns~~ jetzt nicht geschildert werden. Aber betrachten wir das Axiomensystem, wie es in der vielleicht richtigsten Vorstellungsform, wie es in der Gruppe IV, Axiome (Math. Annal. 88) gegeben wird: Die Gruppe IV, Axiome der Form: $a + 1 \neq 0$, $S(a+1) = a$ zeigen mit völliger Deutlichkeit, auf welche Sätze der Begriff der Form vorausgesetzt wird, so ist vom mathematischen Standpunkt fingerade nicht einzuwenden. Dann tatsächlich, wenn man der Mathematik sagt, daß sie mit der Form, wenn sie zunächst diesen Axiomen formt und verwendet, niemals in Widersprüche kommt, so ist damit jedes reine mathematische Verfahren vollkommen befriedigt. Man könnte mit gutem Recht sagen, daß damit eine mathematische Logik gegeben wäre, wenn man sich entschließt, die Logik als die Summe derjenigen Sätze und Begriffe zu fassen, auf denen das System aller Sätze abzuleiten ist, wobei natürlich zugegeben ist, daß diese Summe zu keinem ~~ist~~ Moment absolut vollzählig ist, da ja irgendwelche Zufälligkeiten auf neue Sätze führen können, zu deren Begründung die Einführung neuer Axiome erforderlich ist. Aber da wird immer wieder das Vorhandensein prinzipieller Zweifelhaftigkeit kommen kann, liegt darin keine prinzipielle Schwierigkeit und unüberwindliche Schwierigkeit. Für die Frage z. B. Russels

Propriété de l'Université de Lille

Begründung der logischen Sätze gegenüber empirischen oder sachlichen Sätzen überhaupt ist ohne weiteres klar. Zu fragen ist nur, wie weit diese Begründung eine rein logische zurückgeführt, und wie sie sich mit der Identität oder ~~[illegible]~~ Abhängigkeit der von Russel und Couturat ebenso wie von Mahoney allerdings nur recht verschiedenen Kreise zu erklären und zu begründen sind versteht. Um zunächst von der Seite der Mathematik her eine Begründung zu finden, wandern wir uns zu der Form der Urteilsfindung die im Gegensatz zu allen in der zeitgenössischen logisch orientierten Kritiken rein zum inneren Interesse der Mathematik ausgeht und auch keinerlei konstruktiv logisch Faktor außerhalb der Mathematischen Beweis außer für die Axiomatik, wie sie Hilbert vertritt. „Es gebe nicht nur — und nur die Axiomatik — das kann man vielleicht als Programm auffassen — sondern Widerspruchsfreiheit zu vermeiden, wenn der durch sie gefordert Ruf der Mathematik als Wissenschaft sowohl Wissenschaft wiederum erfüllt sondern soll: die prinzipielle Forderung der Axiomatik muß vielmehr weitergehen, nämlich dahin, zu erkennen, daß jedesmal innerhalb eines Wissensgebietes auf Grund der aufgestellten Axiomensystems Widerspruchsfreiheit unmöglich sind." (Axiomatisches Denken S. 417 Mathemat. Annalen 78). Die Unmöglichkeit solcher Widerspruchsfreiheit zu zeigen ist die Aufgabe eines Beweises, der aber von Hilbert selbst sehr klar erkannt (Logische Grundlagen d. M., M. Z. 88, S. 153. und Neubegründung d. M. 165) nicht mehr der eigentlichen Mathematik angehört, sondern einer Wissenschaft, die er Metamathematik nennt. Der Sinn eines Beweises ist nun kurz folgender: Wir formalisieren den ganzen Bestand der Mathematik und zeigen noch, daß wir, um zu sämtlichen Formeln zu kommen, mit sich bestimmten Anzahl von Zeichen auskommen, die wieder noch bestimmten Zeichen hervorbringen. Alle Tatsächlichen Voraussetzungen ist auf die so formalisierten Mathematik beschränkt. — Man kann nun in das Gebiet der Metamathematik eintreten — wobei der Beweis der Widerspruchsfreiheit fast vollständig vorliegt. — Das eigentliche Verfahren soll hier ~~nur~~ jedoch nicht geschildert werden. Aber betrachten wir das Axiomensystem, wie es in der vielleicht richtigsten Verfassung (Math. Annal. 88) gegeben wird: die Gruppe IV Axiome der Zahl: $a + 1 \neq 0$; $S(a+1) = a$ zeigen mit völliger Deutlichkeit, auf welche Weise reduziert werden soll. Wenn ~~[illegible]~~ in den letzten Zeichen der Begriff der Zahl vorausgesetzt wird so ist zum mathematischen Beweis eingewandert. Dann theoretisch, weiß man der Mathematik sagt daß sie mit der Zahl, sofern sie sie zunächst diesen Axiomen faßt und verwendet, niemals in Widersprüche kommt, so ist damit jedoch keine mathematische Aussage gemacht, sondern vielmehr befindet sich. Man könnte mit gutem Recht sagen, daß damit eine mathematische Logik gegeben sei, nämlich sich auffassen, die Logik als die Summe der Sätze und Begriffe zu fassen und daraus das System aller Sätze abzuleiten ist, wobei natürlich zugegeben ist, daß diese Summe zu keinem ~~[illegible]~~ Moment absolut vollzählig ist, da ja irgendwelche Zufälligkeiten auf neue Sätze führen können, zu deren Begründung die Einführung neuer Begriffe erforderlich ist. Aber da diese immer wieder den Vorteil erforderlich ist, liegt darin keine prinzipielle Unvollständigkeit bereits finden kann, und unüberwindliche Schwierigkeiten. Nur die Frage z. B. Russels ist ~~[illegible]~~ anders gestellt. Ihm handelt es sich nicht darum, oder nur zum Teil darum, zu verfahren, daß die Mathematik sich in Widersprüche verwickle. Das eigentliche Ziel ist vielmehr, die Identität von Mathematik und Logik zu zeigen:

Université Lille

Die Logik ist die Jugend der Mathematik. Die Mathematik das Mannesalter der Logik. — Wenn trotzdem z.B. Natorp, der ja auch besorgt, daß die Mathematik kein aus dem Denken entspringe, gegen diese Identification sich wendet, so spricht er nicht für, sondern gegen Russel und Couturat mit dem Versuch, Logik und Mathematik miteinander, streng genommen, darzustellen.

Es zeigte sich aber bei Gilbert und er liefert sich genau so gut an Stoicos Axiomatik zeigen, daß die Mathematik zwar nur durch logisches Denken, aber ohne Zurückführung auf logische Grundorgane, vor allem Widersprüchen und Paradoxien gesichert werden kann. Aber man braucht sich darum vorläufig nicht zu beunruhigen. Man kann überdies versuchen, die Reihe der Grundsätze und Grundbegriffe auf ein Minimum zu bringen, und zwar auf ein Minimum, in einem anderen Sinne als Gilbert ~~oder Stoicos~~. Man kann z.B. mit Natorp nach den ursprünglichen Funktionen des Denkens fragen, aus denen Ordnung und Zahl entspringen, oder man kann mit Russel sich zum Problem wenden, wie Zahl oder Ordnung zu definieren seien und was zu dieser Definition erforderlich ist. Auf diese Weise werden ev. diese Begriffe – und damit auch Grundsätze – die bei Gilbert vorausgesetzt sind, zurückführbar. ~~Aber zurückführbar~~ Zurückführbar sind aber das nicht mehr im Mathematischen selbst, sondern im Mathematischen Bereich liegt. ~~Aber~~ welcher Art sind nun die Begriffe, auf die Russel und Couturat zurückführen? Die Begriffe der Menge, des Individuums, der Eigenschaft, der Zugehörigkeit zweier Urteilen, von denen auch gegangen wird, sind keineswegs erste Begriffe im Sinne einer formalen Logik. Die sind erste Begriffe höchstens für eine Grundlegung der Mathematik, die aber nicht bloß durchsichtig kommt, logisch zu sein, so bald man sich Logik der Mathematik fragt. Aber das beanspruchen sie auch nicht. Denn der Begriff von Logik, der zu Grunde gelegt wird, ist gar nicht der der Aristotelischen, die sich vielmehr bedeutend ausgebreitet und erweitert ist, aber es ist der Begriff einer formalen Logik. Russell stellt die Frage, was der Gegenstand sei, der wir sowohl Mathematik oder Logik nennen können und nennt als unmittelbare Charakteristika, daß es sich nicht um spezielle Dinge und spezielle Eigenschaften handle, daß unser Ziel das formale gewesen sei, daß wir es mit der Form der Satze zu tun haben, daß wir noch bei keinen logischen Konstanten treffen u. daß. u. Es der Satz mit Logik so gefaßt wird, der Sinn ist keine Antwort auf die Frage nach der Grenze von Mathematik und Logik zu geben. Denn von hier aus entwickelt sich nun die mathematischen Grundbegriffe. ~~Die formale Logik~~ ~~– es ist nicht Aufgabe~~ ~~Dieses Kriterium gegen einen andern~~ ~~welche wie der Form des Denkens gegen~~ ~~die aus den Bedingungen der Gegenständlichkeit gewonnen~~ ~~aber aber nur auf der Methode festgehalten werden~~ Soweit sie die Natur einzelner Grundlagen verfolgen sind. Wenn z.B. Alois Müller (S. Ges. d. Wissenschaft S. 47.) vom Standpunkt Rickerts aus, ~~den man die Grundlagen einer~~ ~~Sonderwissenschaft nennen mag~~ gegen Russel den Einwand erhebt, die Zahl sei bei ihm nicht aus logischen, sondern aus relationstheoretischen Begriffen erbaut, so wird dieser Vorwurf für Russel gleichgültig und erledigt. Die logische Begründung die er geben will und wie seinem Sinne auch tatsächlich gibt, wenn keinen Anspruch darauf, irgend welche letzten Begriffe und Sätze einer Wissenschaft aufzuweisen. Ihre Leistung besteht vielmehr, und sehr bestehen darin, daß eine Konstruktion, die sehr bestehen darin, daß eine Konstruktion

dieser Begriff von Logik muß jedoch

Propriété de l'Institut Eric Weil, Université de Lille

Es zeigte sich aber bei Hilbert und es läßt sich so gut am Beweis der Axiomatik zeigen, daß die Mathematik zwar nur durch logisches Denken, aber ohne Rückführung auf logische Grundorgane – wo allein Mißverstehen und Pseudo-Denken geschehen kann. Aber man braucht sich damit vorläufig nicht zu begnügen. Man kann überdies versuchen, die Anzahl der Grundsätze und Grundbegriffe auf ein Minimum zu bringen, und zwar auf ein Minimum, in einem anderen Sinne als Hilbert ~~oder Peano~~. Man kann z.B. mit Dedekind nach den ursprünglichen Funktionen des Denkens fragen, aus denen Ordnung und Zahl entspringen, oder man kann mit Russell sich zum Problem machen, wie Zahl oder Ordnung zu definieren seien und was zu dieser Definition erforderlich ist. Auf diese Weise werden ver-schiedene Begriffe – und damit auch Grundsätze – die bei Hilbert irreduzibel sind, zurückführbar, ~~aber zurückführbar~~ zunächst freilich auch etwas das nicht mehr im Mathematischen selbst, sondern im Metamathematischen beruht. ~~Aber~~ welcher Art sind die Begriffe, auf die Russell und Couturat zuletzt allen Stützen? Die Begriffe der Menge, des Individuums, der Eigenschaft, der Zugehörigkeit zwischen Urteilen, von denen aus gegangen wird sind keineswegs erste Begriffe, im Sinne einer formalen Logik. Die sind erste Begriffe zwar für eine Grundlegung der Mathematik, die aber nicht beweisen kann, daß sie eine Logik der Vernunft sei. Aber das beweisen sie auch nicht. Denn die Logik ist ja gerade nicht der zu Grunde gelegt wird, ist zwar nicht der Begriff der Aristotelischen, die für vielmehr bedeutend ausgebaut und erweitert ist, aber es ist der Begriff einer formalen Logik. Russell stellt die Frage, was der Gegenstand sei, von der man behaupten könnte, daß es sich nicht um spezielle Dinge und spezielle Eigenschaften handle, daß unser Ziel das formale Geltende sei, daß es sich mit der Form des Satzes zu tun haben, daß wir noch bei fundamentalen logischen Lehrsätzen fragen u. dgl. m. Es ist mit Logik so gefordert wie zur Form ist keine Antwort auf die Frage nach der Grenze von Mathematik und Logik zu geben. Denn von hier aus entwickelt sich nicht sich die mathematischen Grundbegriffe stetig aus den logischen – es ist nicht Aufgabe diese formale Logik als Lehre von den Formen des Denkens gegen eine andere, die aus den Bedingungen der Gegenständlichkeit konstituiert, aber eben nur auf der Anerkennung festzuhalten wurde, soweit sie die Meinung einzelner Grundlagen verfolgen sind. Dann z.b. Alexis Müller (s. Ges. d. Wissenschaft. S. 47.) vom Standpunkt Kukerts aus, ~~der man die geistigen Dinge konstruktivistisch nennen muß~~ gegen Russel, der für eine formale Logik sei, die ihm nicht aus logischen, sondern aus relationstheoretischen Begriffen erbaut ist. So wird dieser Vorwurf für Russel zweifelhaft und offenbar. Die logische Begründung die er geben will und die seinen Sinn auch tatsächlich gibt, wenn keinen Anspruch darauf, irgend welche letzten Begriffe im transzendentalen Sinne aufzuweisen. Ihre Leistung besteht vielmehr, und soll bestehen darin, daß eine Konstruktion der Zahl gemacht wird. Man, wenn mit Müller dagegen sagt, die Zahl sei ein Gegenstand im formalen Medium (was formales Medium ist, ist noch nicht zu bestimmen) und trage quantitativen Charakter,

Dieser Begriff von Logik muß jedoch

Property of the Institute for Philosophy

(von Quantität sei, müsse man aber sehen!, Rickert 1.65)
so ist das eine Fragestellung, die an sich – abgesehen
von ihrer Haltbarkeit oder Unhaltbarkeit – mit der Rest.
selbst Arbeitsweise nicht ~~[illegible]~~ mindestens kollidiert, ja
wäre Bäume fragen, die mit ihr überhaupt am kleinen
Finger zusammenkommt. Dann auf der einen Seite
will man Beschreibung, auf der andern Seite
Konstruktion der Gesetze.

Implizite ist damit unsere Frage nach den Grenzen
von Logik und Mathematik beantwortet: auf jeden Fall
ist ein festes Unterscheiden vom Standpunkt der formalen Lo.
gik nicht angegeben. Aber wenn man sich Vertreter Logi.
schen Grundlagen beschäftigt, so scheint es oft ob allig vom Stand.
punkte der Aufzeichnungslogik nicht zu fragen wäre wie mit der
Logik gesetzt und so die Eigenschaften scharf umfaßt. Dann für
und so gewinnt der Vorteil Gewicht, auch so reine logische Be.
griffen wie dem Begriff der Kalkulation, die Gesetzmäßigkeit, zu
die Gesetzmäßigkeiten abzuleiten. Es würde weiter schon ausreichen,
zugegeben, daß die Art in der diese Ableitung gegeben wird, über.
haupt unbefriedigend, nämlich den Mengenbegriff, die alle Folge nicht
genügt werden. Aber man kommt auch weiter gegen
und fragen, ob tatsächlich schon mit den Begriffen der Ka
kulation, und Kalkulation und der Kalkulus eigentlich auch
bestehen die ordinale Gesetzmäßigkeit als solche gegeben ist, oder ob
nicht vielmehr das transzendentale Motiv der Ordnung
überhaupt in einem viel zu speziellen Sinne genommen
ist. Allgemeiner wäre gefragt worden, daß Mathema.
tische Begründung der Mathematik und Logische Be.
gründung einander, ohne sie richtig gefaßt worden
wären widerstreiten und Konstruktionen woran die
Logik sich darauf zu beschränken haben, die Bedeu.
tung der Zahl im Funktionalbegriff, das Band auf.
zu zeigen und Begründung der Mathematik wird für
sie nur scheinbar können, diesen Funktion ihr Falle
herzustellen. Die Begründung im Sinne der begrifflichen
Sicherung und der tatsächlichen, d. h. die eigentlichen Gesetz.
mäßigen Konstruktion wird man der Mathematik selbst
überlassen müssen.

Fragen wir aber jetzt nochmals ~~die Frage der~~ nach der
Reduzibilität der verschiedenen Begründungen, so ist mit dem
bis zuvor gesagten die Verwirrung scheinbar auch äußerste zu
kommen: zwei Arten von Logik geben zwei Arten von Grund-
legung, und jede hat die andere, um ihr Ziel zu erreichen, nötig. Die kardinale Theorie setzt im Begriffe des einen
und des andern Mengenglieds, der einen und der andern
Menge den Begriff der Ordnung voraus – die ordinale Theorie benützt, um von der Ordnungsstelle zur Zahl zu kommen, die Menge. – Eines ist auf jeden Fall als das gemeinsame Ziel beider klar: der Begriff der Zahl soll rein aus dem Denken, nicht durch Stützung auf irgend eine Empirie des Raumes, der Dinge, der psychischen Akte oder andrer Gegebenheiten erzeugt werden. Aber eben dies gemeinsame Ziel gibt die Möglichkeit der Beurteilung. Wurde vorhin die Russellsche Logik formal genannt, so läßt sich eine Ergänzung dieser Charakterisierung geben: sie ist ihrem Wesen nach Abstraktionslogik. Der Begriff der Zahl wurde aus dem der Gleichzahligkeit abstrahiert – aber gilt hier nicht der Einwand, der gegen jede Abstraktionstheorie zu erheben ist,

will man [illegible],
Konstruktion der Zahl.

Implizite ist damit unsere Frage nach den Grenzen von Logik und Mathematik beantwortet: auf jeder Stufe ist ein festes Verhältnis vom Standpunkt der formalen Logik nicht anzugeben. Aber wenn man sich Mathematik und Logik Grundlagen aufsucht, so scheint es, als ob man vom Standpunkte der Rechnungslogik nicht zu fragen wäre, wie weit die Logik geht und wo die Hypothesenschaft anfängt. Dann hier wird ja gewonnen der Versuch gemacht, auf so reine logische Begriffen wie dem Begriff der Relation, die Zahl ihr uns nur, die Zahlenordnung abzuleiten. Es wird, wenn schon ersichtlich, zu zeigen, daß die Art, in der diese Ableitung gegeben wird, [illegible] unbefriedigt, nämlich dem Prinzipienbegriff, die als solche nicht [illegible] worden. Aber man kann auch weiter gehen und fragen, ob tatsächlich schon mit den Begriffen der Relation und Relationen und der Relationen überhaupt eigentlich auch bereits die ordinale Zahlreihe als solche gegeben ist. Es hier nicht allemal das transzendentale Motiv der Ordnung überhaupt in einem viel zu speziellen Sinne genommen ist. Abschließend wenig gesagt worden, daß Verbindung, diese Begründung der Mathematik und logischen Begründung einander, sofern sie richtig gefaßt worden, [illegible] widerstreiten noch Konkurrenz werfen. Die Logik wird sich damit zu beschränken haben, die Bedeutung der Zahl im Funktionalsystem [illegible] den Kauf aufzuzeigen und Begründung der Mathematik wird für sie nur gewisse Räume, diese Funktion ihre Stelle anzuweisen. Die Begründung im Sinne der begrifflichen Möglichkeit und der tatsächlichen, d. h. die eigentlichen Grundlagen Konstruktion wird man der Mathematik selbst überlassen müssen.

Fragen wir aber jetzt nochmals ~~in Frage der~~ nach der Reduzibilität der verschiedenen Begründungen, so ist mit dem bis hierher gesagten die Verwirrung scheinbar äußerste gekommen: zwei Arten von Logik geben zwei Arten von Grundlegung, und jede hat die andere, um ihr Ziel zu erreichen, nötig. Die kardinale Theorie setzt im Begriffe der einen und der anderen Mengenglieder, der einen und der anderen Menge den Begriff der Ordnung voraus – die ordinale Theorie benutzt, um von der Ordnungstabelle zur Zahl zu kommen, die Menge. – Eines ist auf jeden Fall als das gemeinsame Ziel beider klar: der Begriff der Zahl soll rein aus dem Denken, nicht durch Stützung auf irgend eine Empirie des Raumes, der Dinge, der psychischen Akte oder anderer Gegebenheiten erzeugt werden. Aber eben dies gemeinsame Ziel gibt die Möglichkeit der Beurteilung. Wird hierbei die Russellsche Logik formal genannt, so läßt sich eine Ergänzung dieser Charakterisierung geben: sie ist ihrem Wesen nach Abstraktionslogik. Der Begriff der Zahl wurde aus dem der Gleichzahligkeit abstrahiert – aber gilt hier nicht der Einwand, der gegen jede Abstraktionstheorie zu erheben ist, daß ~~sie~~ der Bezugspunkt, auf den hin abstrahiert wird, vorgegeben sein muß? In der Tat, muß es als Gewaltsamkeit bezeichnet werden, wenn man zunächst von dem absieht, was das Wesen der Zahl ausmacht – der Systemordnung, und zunächst etwas konstruiert, das als Eigen-

Impressum / Institut für Weltuniversität de Lille

schaft von Mengen aufbaut, und von dem niemand sagen könnte, was er wäre, wenn nicht der Name Zahl in der Definition aufträtte. Es ist unzulässig, daß hier die Definition in einer Art aufgefaßt wird, die sie in ihrer Brauchbarkeit einschränkt. Gewiß, wenn definieren heißt, einen unbekannten Begriff durch bekannte, die in bekannten Relationen stehen, auszudrücken, so ist hier alles wohlbestimmt, und wenn ~~[illegible]~~ Objektivität der Begriffe in der Übereinstimmung mit dem Gegenstande liegt, so sind diese Begriffe, da sie ja von den Gegenständen abstrahiert sind, objektiv. Aber gerade diese Mathematik bietet die gewichtigste Instanz gegen diese Auffassung der Begriffe, gerade am mathematischen Begriff zeigt sich die Verfehltheit des Fortlassens der Merkmale, denn hier ist gerade der weitere Begriff der inhaltreichere, wie z. B. in der reellen Zahl rationale und irrationale beide vollständig enthalten sind. Und implizite gibt Russell selbst das zu, wenn ihm die Menge durch eine Eigenschaft definiert ist. Was damit gefordert und anerkannt ist, ist nichts anderes als der Ursprungsbegriff. Denn gibt man für die Menge zu, daß die Eigenschaft nicht vom Ding abstrahiert ist, daß vielmehr die Denkfunktion den Gegenstand erzeugt, so ist nicht einzusehen, warum man die Berechtigung ~~für~~ dieser Gedanken für die Konstruktion der Zahl bestreitet. Was nämlich bedeutend gibt, ist ~~[illegible]~~ eben dies, daß das System der Zahlen das System der Ordnung ist – Unterscheidbarkeit und Ordnung sind die Grundmomente die alle andre in sich enthalten, und, weil unbestimmt, daß die Zahlen etwas brauchten, aus dem sie zu abstrahieren wären, genügt die Form, in der sie sich gegenseitig ihre Stellen weisen, um ihren Sinn zu beschreiben. – Für die logische Grundlegung der Mathematik bedeutet das folgendes: es kommt nicht darauf an, Abstraktionsbegriffe zu bilden und Definitionen, aus denen man nachher das herausholt, was man vorher hineingetan hat, sondern die Aufgabe ist, die Funktionen aufzuweisen, aus denen die Begriffe entspringen, und ihre Objektivität dadurch zu erklären, daß man ihre Bedeutung und Leistung im System der Wissenschaft nachweist. Allerdings hat die Logik damit nicht die mathematische Grundlegung zu vollziehen, die ihrem ganzen Wesen nach andre Aufgaben zu erfüllen hat, denn wenn der Ausgangspunkt das Faktum der Wissenschaft ist, so kann in dieser Selbstbesinnung nicht das Material geschaffen oder geändert werden – es können nur die Richtungen und die Schichten der Objektivität gekennzeichnet werden. Damit aber, daß die technische Konstruktion, wenn man das Wort gebrauchen darf, der Arbeit der Wissenschaft überlassen wird, erkennt man an, daß zwei Richtungen der Begründung möglich und berechtigt sind. Ob die ordinale oder die kardinale Theorie für die Mathematik brauchbarer sind, ist eine mathematische Frage – von Seiten der Logik ist nur zu sagen, daß der Funktionsbegriff, wie ihn die Dedekindsche Ableitung benutzt, als wahrhaft ursprünglicher auch der

Propriété de l'Institut Emile Wellington Université de Lille

ausdrücken, so ist hier alles wohlbestimmt, und wenn
~~[illegible]~~ Objektivität der Begriffe in der Übereinstimmung
mit dem Gegenstande liegt, so sind diese Begriffe, da sie
ja von den Gegenständen abstrahiert sind, objektiv. Aber
grade diese Mathematik bietet die gewichtigste Instanz gegen
diese Auffassung der Begriffe, grade am mathematischen
Begriff zeigt sich die Verfehltheit des Fortlassens der Merk-
male, denn hier ist grade der weitere Begriff der inhaltrei-
chere, wie z. B. in der reellen Zahl rationale und irratio-
nale beide vollständig enthalten sind. Und implizite gibt
Russell selbst das zu, wenn ihm die Menge durch eine Eigenschaft
definiert ist. Was damit gefordert und anerkannt ist, ist nichts
anderes als der Ursprungsbegriff. Denn gibt man für die Menge
zu, daß die Eigenschaft nicht vom Ding ~~erzeugt~~ abstrahiert ist, daß vielmehr die
Denkfunktion den Gegenstand erzeugt, so ist nicht einzusehen, wa-
rum man die Berechtigung ~~für~~ dieser Gedanken für die Konstruk-
tion der Zahl bestreitet. Was wünschbar bedenkend gibt, ist ~~[illegible]~~
eben dies, daß das System der Zahlen das System der Ordnung
ist. — Unterscheidbarkeit und Ordnung sind die Grundmomente, die
alle andere in sich enthalten, und, weit entfernt, daß die Zah-
len etwas Fertiges, aus dem sie zu abstrahieren wären, gemäß
die Form, in der sie sich gegenseitig ihre Stellen anweisen, um ihren
Sinn zu beschreiben. — Für die logische Grundlegung der Mathe-
matik bedeutet das folgendes: es kommt nicht darauf an, Ab-
straktionsbegriffe zu bilden und Definitionen, aus denen man
nachher das herausholt, was man vorher hineingetan hat,
sondern die Aufgabe ist, die Funktionen aufzuweisen, aus
denen die Begriffe entspringen, und ihre Objektivität dadurch
zu erklären, daß man ihre Bedeutung und Leistung im Sy-
stem der Wissenschaft nachweist. Allerdings hat die Logik
damit nicht die mathematische Grundlegung zu vollziehen, —
die ihrem ganzen Wesen nach andere Aufgaben zu erfüllen hat,
denn wenn der Ausgangspunkt das Faktum der Wissenschaft ist,
so kann in dieser Selbstbesinnung nicht das Material geschaf-
fen oder geändert werden — es können nur die Richtungen
und die Nischen der Objektivität gekennzeichnet werden.
Damit aber, daß die technische Konstruktion, wenn man
das Wort gebrauchen darf, der Arbeit der Wissenschaft über-
lassen wird, erkennt man an, daß zwei Richtungen der
Begründung möglich und berechtigt sind. Ob die ordinale oder
die kardinale Theorie für die Mathematik brauchbarer sind,
ist eine mathematische Frage — von seiten der Logik ist nur
zu sagen, daß der Funktionsbegriff, wie ihn die Russellsche
Ableitung benutzt, als wahrhaft ursprünglicher auch der
mengentheoretischen zugrunde gelegt werden muß, falls sich
die Mathematik, wie es scheint, für diese entscheidet — nur
so wird man mit Recht von logischer Grundlegung
sprechen können.

Propriété de l'Institut Etienne Weill, Université de Lille